Curvas Cónicas e Superfícies Geradas pelas Curvas Cónicas: Os seus Traçados Geométricos e Aplicações no Design.

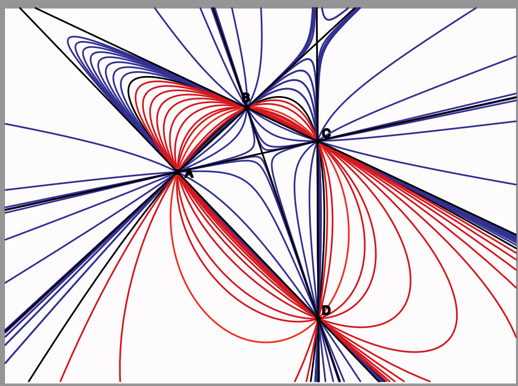
Joaquim Manuel de Castro Bonifácio da Costa

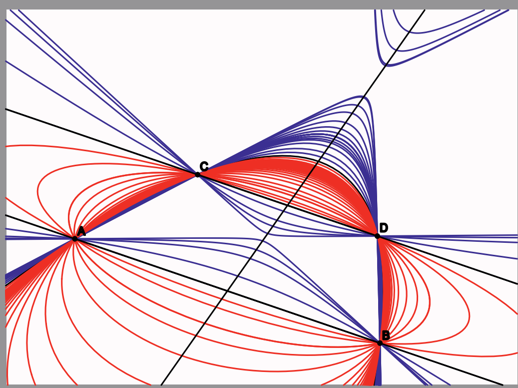
UNIVERSIDADE DE LISBOA

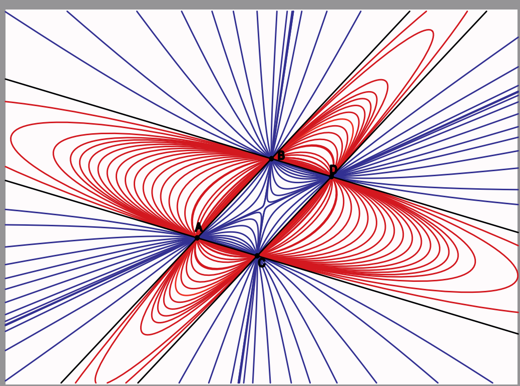
FACULDADE DE ARQUITETURA
UNIVERSIDADE DE LISBOA

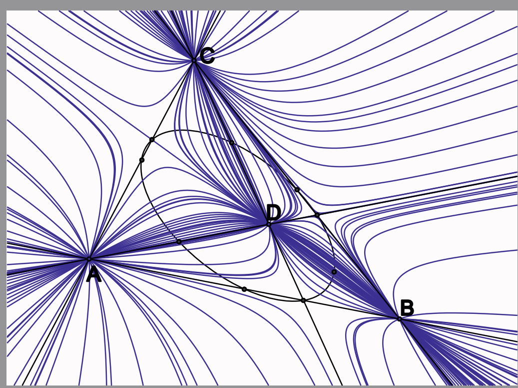
DOUTORAMENTO EM DESIGN

Orientadores
Doutor Fernando José Carneiro Moreira da Silva
Professor Catedrático da Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa
Doutor Vítor Manuel Bairrada Murtinho
Professor Associado do Departamento de Arquitetura da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra









Constituição do Júri

Presidente: Doutor António José Morais,
Professor Associado com Agregação, Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa.

Vogais: Doutor Fernando José Carneiro Moreira da Silva,
Professor Catedrático, Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa;

Doutor Vítor Manuel Bairrada Murtinho,
Professor Associado, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra;

Doutor João Paulo Cabeleira Marques Coelho,
Professor Auxiliar, Universidade do Minho;

Doutor Luís António dos Santos Romão,
Professor Auxiliar, Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa;

Doutor Luís Miguel Cotrim Mateus,
Professor Auxiliar, Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa;

Doutora Fátima Regina Duarte Gouveia Fernandes Jorge,
Professora Adjunta, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Castelo Branco.

Tese especialmente elaborada para a obtenção do grau de doutor
Documento definitivo

MAIO 2016

FACULDADE DE ARQUITETURA
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Curvas Cónicas e Superfícies Geradas pelas Curvas Cónicas: Os seus Traçados Geométricos e Aplicações no Design.

Joaquim Manuel de Castro Bonifácio da Costa

Orientadores

Doutor Fernando José Carneiro Moreira da Silva
Professor Catedrático, Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa

Doutor Vítor Manuel Bairrada Murtinho
Professor Associado, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Constituição do Júri

Presidente:

Doutor António José Morais,
Professor Associado com Agregação, Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa.

Vogais:

Doutor Fernando José Carneiro Moreira da Silva,
Professor Catedrático, Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa;

Doutor Vítor Manuel Bairrada Murtinho,
Professor Associado, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra;

Doutor João Paulo Cabeleira Marques Coelho,
Professor Auxiliar, Universidade do Minho;

Doutor Luís António dos Santos Romão,
Professor Auxiliar, Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa;

Doutor Luís Miguel Cotrim Mateus,
Professor Auxiliar, Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa;

Doutora Fátima Regina Duarte Gouveia Fernandes Jorge,
Professora Adjunta, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Castelo Branco.

Tese especialmente elaborada para obtenção do grau de doutor em design
Documento definitivo

Lisboa, Maio de 2016

À Isabel, pela cumplicidade de uma vida, e aos meus filhos Vasco e Pedro

Agradecimentos

Aos meus orientadores Doutor Fernando José Carneiro Moreira da Silva e Doutor Vítor Manuel Bairrada Murtinho, com reverência às qualidades científicas e profissionais, quero agradecer o estímulo, a oportunidade das críticas e sugestões e o rigor exigido. Desde a metodologia até inúmeros aspetos relativos à forma e conteúdo, este trabalho procura refletir os contributos que tiveram. O respeito e reconhecimento levam-me a solicitar o favor de continuarem a ser meus amigos.

A frequência da parte curricular do Doutoramento, as palestras do Seminário de investigação e a avaliação realizada nos diversos pontos de situação, pela diversidade dos temas e qualidade das apresentações possibilitaram a extensão da minha mundividência, com contributos que espero estejam refletidos neste texto, pelo que a todos os intervenientes, docentes e oradores, é devido um justo agradecimento.

Aos meus colegas e amigos que tiveram a paciência e amizade para me ouvirem falar de algo por vezes exótico para eles, mas de cujos contributos e experiências pessoais recolhi sugestões, sobretudo na forma de expor o tema, um abraço agradecido.

Agradeço ainda aos meus alunos, principal razão desta tese, pela emoção e prazer que me têm proporcionado ao longo da minha vida docente, pelo crescimento pessoal de cada um, desde o início dos cursos até ao exercício profissional.

A todos os meus familiares agradeço o estímulo e apoio ao longo da vida. Aos meus filhos Vasco e Pedro, que todos os dias me alegram, pelas competências, conhecimentos e sucessos pessoais, mas sobretudo pela satisfação de os ver cidadãos honestos e trabalhadores, conscientes dos seus direitos e deveres, o que, para além das suas atitudes sempre exigentemente críticas no rigor, foi estímulo na realização desta tese.

À Isabel, companheira de uma vida, nos momentos difíceis e alegrias, pelo apoio e estímulo decisivo, tanto intelectual como anímico, agradeço este trabalho que também é teu.

RESUMO

No âmbito do Design, e graficamente, sistematiza-se e aprofunda-se o conhecimento das curvas cónicas e, em especial, sobre as suas construções geométricas, contribuindo para o reconhecimento da importância do estudo destas curvas e das superfícies geradas a partir delas no ensino da geometria no Design. Utiliza-se um método expositivo de análise crítica do conhecimento existente, propondo-se ângulos de abordagem menos usuais. Procura-se, ainda, suprir o insuficiente conhecimento e divulgação científica das cónicas em Portugal, e em particular no Design, de três modos: pela sistematização do conhecimento existente, pela adaptação do conhecimento da geometria projetiva, com expressão na geometria plana e na geometria analítica, para a linguagem dos traçados geométricos em geometria plana e em geometria descritiva e, ainda, pela contribuição para a utilização mais generalizada, designadamente com os meios tecnológicos atuais.

Paralelamente, identificam-se potencialidades das curvas na capacidade de resolução de problemas de representação gráfica rigorosa, por designers e outros profissionais, designadamente os das áreas das artes visuais e da arquitetura, com reflexos no ensino e na prática profissional. Exemplificam-se utilizações dos traçados das curvas cónicas e das superfícies geradas com elas, no Design e em outras áreas, simplificando soluções e reafirmando a importância e atualidade da geometria plana e da geometria descritiva, tanto no processo de construção do conhecimento e no desenvolvimento do projeto, como nas aplicações práticas, enquanto suporte concetual e representação gráfica.

Tendo em vista a simplificação da aplicação das cónicas e das superfícies geradas com elas em projetos de Design, resolveram-se alguns problemas com solução complexa, ou sem solução, na literatura consultada. Para tal, utilizámos métodos menos usuais, designadamente alguns derivados da geometria descritiva e, sobretudo, procurando integrar os conhecimentos mais recentes sobre as cónicas.

Tal abordagem permitiu ainda o aprofundamento de conhecimento com potencial interesse teórico em diversas áreas e o enunciar de algumas propriedades das cónicas que não se encontraram descritas na literatura, numa relação dialética entre teoria e prática, num contexto que contribui para a reafirmação da geometria descritiva, na sua capacidade de desenvolvimento do pensamento criativo.

Palavras-chave: cónicas, curvas cónicas, superfícies, superfícies quádricas, design.

**Conical curves and surfaces generated by conical curves:
Their geometric constructions and applications in Design.**

ABSTRACT

In context of Design, and graphically, this research aims to systematize and to deepen the knowledge about the conical curves, and especially on their geometrical constructions, contributing to the recognition of the importance of the study of theses curves and of the surfaces generated from them, mainly in the teaching of geometry in Design courses. An expositive methodology of critical analysis of literature is used, proposing less usual approaches. It also aims to compensate insufficient knowledge and scientific dissemination of conical curves in Portugal, particularly in Design, in three ways: systematizing the existent knowledge, adapting knowledge of projective geometry in plane and analytical geometry for the language of geometrical constructions in plane geometry and descriptive geometry and, still, contributing to a more generalized use involving recent technology.

Parallel, the study identifies potentialities of the conical curves in solving problems of rigorous graphic representation for designers and other professionals, namely those from the areas of visual arts and of architecture, with reflexes in the teaching and in the professional practice. It gives examples of practical uses of graphic resolutions of conical curves and of their generated surfaces in Design and other areas, reassuring the importance and relevance of plane geometry and descriptive geometry, both in the construction of knowledge and in the development of the project and in practical applications, as a conceptual framework and graphic representation.

Within the scope of simplifying the use of conics and surfaces generated with them in Design projects, are presented solutions for some problems with complex solutions, or without solution, in reviewed literature.

The study approach contributes not only to deepen the theoretical frame in several areas but also enunciates some proprieties of conics not mentioned yet in literature, in a dialectical relationship between theory and practice, in a context that contributes to the reaffirmation of descriptive geometry and its capacity of development of creative thinking.

Keywords: conics, conical curves, surfaces, quadric surfaces, design.

ÍNDICE GERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

GLOSSÁRIO

Abcissa – em geometria cartesiana é a medida no eixo horizontal x que define a distância à origem da projeção ortogonal de um ponto. Ordenada será a distância do ponto à sua projeção ortogonal no eixo x.

Abcissa da ordenada de um ponto de uma curva cónica – de acordo com a definição utilizada pelos gregos na antiguidade clássica e também utilizada em geometria projetiva, é a parte do diâmetro conjugado relativamente à corda que passa num ponto da cónica, definindo a ordenada, parte essa entre um extremo do diâmetro e a interseção com a corda. De notar que os diâmetros conjugados não são obrigatoriamente perpendiculares entre si.

Ápex – o mesmo que vértice.

Ápex de uma curva cónica – o mesmo que vértice da curva cónica.

Assímptota ou assíntota – reta que é tangente a uma curva num ponto desta no infinito, por exemplo, as hipérboles têm duas assímptotas.

Baricentro de um triângulo – na física é o centro de gravidade, ou centro de massa, ou centróide do triângulo. Geometricamente corresponde ao ponto de interseção das medianas do triângulo, sendo medianas os segmentos que unem o ponto médio de cada lado ao vértice oposto.

Base do cone – é a figura plana, normalmente um círculo, cujos pontos definem, em conjunto com o vértice do cone, os contornos do sólido.

Bomba – é o espaço livre, normalmente cilíndrico, que pode existir no interior de uma superfície helicoidal.

Círculo de gola – nos hiperboloides de revolução de ramo único é o círculo definido pelos vértices da hipérbole geradora ao rodar em torno do eixo de geração da superfície. Por analogia pode também utilizar-se para designar o círculo que se pode estabelecer com centro no centro de uma hipérbole e diâmetro definido pelos vértices da hipérbole.

Círculo focal – nas curvas cónicas centrais é o círculo com centro no centro da curva e que passa nos focos.

Cone – é o espaço compreendido entre uma superfície cónica e o plano da diretriz.

Cone de revolução – é o cone reto de base circular.

Cone escaleno ou oblíquo – é o cone em que o segmento que une o vértice ao centro da base não é perpendicular ao plano da base do cone.

Cone reto - é o cone em que o segmento da altura, unindo o vértice ao centro da base, é perpendicular ao plano da base do cone.

Cónica – consoante o contexto pode ser uma forma simplificada de designar uma curva cónica mas também pode designar que um objeto tem a forma de cone.

Cónica central – curva cónica com centro: a elipse, a circunferência enquanto caso particular da elipse, e a hipérbole.

Cónicas degeneradas – são todos os tipos de secções em superfícies cónicas que não são graficamente curvas: um ponto (plano de secção a passar no vértice), uma reta (plano de secção tangente à superfície), duas retas concorrentes (plano de secção a passar no vértice e a cortar a diretriz) ou duas retas paralelas (plano de secção paralelo a todas as geratrizes e vértice impróprio, ou seja, no infinito, tornando-se a superfície cilíndrica).

Contornos aparentes de visibilidade – são o conjunto de linhas que delimitam exteriormente uma representação plana de qualquer objeto tridimensional.

Corda de uma cónica – é o segmento de reta que une dois pontos da curva cónica.

Corda de uma curva – é o segmento de reta que une dois pontos da curva.

Cúbica – é uma curva ou superfície de 3º grau (ver ordem ou grau)**.**

Curva cónica – é qualquer secção plana que se pode produzir numa superfície cónica. É uma elipse se o plano intersetar todas as geratrizes, é uma parábola se o plano for paralelo a uma geratriz não passando no vértice e intersetando a diretriz, e é uma hipérbole se o plano de seção for paralelo a duas geratrizes não passando no vértice e intersetando a diretriz. Se o plano de secção for paralelo a diretriz circular é uma circunferência. Se o plano de secção passar no vértice dá origem a secções designadas por cónicas degeneradas, isto é, se não intersetar as geratrizes a secção é um ponto, o próprio vértice, se contiver uma geratriz, e só essa, a secção é uma reta, a própria geratriz, se o plano de secção passar no vértice e intersetar a diretriz a secção são duas retas geratrizes concorrentes, que se podem tornar duas retas paralelas se o vértice da superfície se situar no infinito definindo-se uma superfície cilíndrica.

Curva discriminante das cónicas – é a parábola, por delimitar a transição entre elipses e hipérboles. Se consideremos uma parábola, dois pontos dela e respetivas tangentes e a reta com a direção do eixo, que passa no ponto médio da corda entre os dois pontos da parábola, o feixe de cónicas centrais que passa nos mesmos dois pontos e tem as mesmas tangentes é constituído por hipérboles, que intersetam a reta direção em pontos situados entre o da interseção com a parábola e o ponto de interseção das tangentes, e por elipses, que intersetam a mesma reta para o lado contrário relativamente à parábola.

Curvatura de uma curva num ponto desta – é a curvatura da circunferência osculante nesse ponto.

Curvatura da curva, do ponto *A* ao ponto *B* – será a curvatura média medida em todos os pontos da curva entre os dois, incluindo os próprios pontos limite da curva.

Curvatura de uma circunferência ou arco de circunferência – é o inverso do raio, ou seja é C=1/r. Interessa igualmente, para esta definição, lembrar que uma circunferência é o lugar geométrico dos pontos equidistantes *r* de um outro designado por centro, sendo *r* o raio.

Curvatura de uma superfície – é a definida pelas curvaturas normais num ponto da superfície. As curvaturas normais num ponto são as curvaturas das linhas de intersecção da superfície com planos perpendiculares à superfície passando nesse ponto, e que contêm a normal à superfície nesse ponto. Sendo que a curvatura é zero nas retas e, nas curvas, analiticamente, pode ser orientada como positiva num sentido e negativa no contrário, estamos perante diversos métodos de abordagem sendo o mais usual o dos máximos e dos mínimos, ou seja, definir a curvatura da superfície naquele ponto como o produto das curvaturas máxima e mínima encontradas. As curvaturas máximas e mínimas são designadas por curvaturas principais. Se à mínima corresponder uma reta o valor é zero que multiplicado pelo valor da curvatura máxima dá sempre zero, o que corresponde a uma superfície planificável. Quando o referido produto é diferente de 0 a superfície é de dupla curvatura, e logo não planificável, podendo ser positiva quando a máxima e mínima são do mesmo sinal, ou seja no mesmo sentido, ou negativa quando de sinais diferentes, ou quando as direções de curvatura forem opostas.

Degenerada – é a curva cónica que, em circunstâncias particulares assume as propriedades geométricas do ponto ou retas ou segmentos de reta.

Diâmetro conjugado (de outro diâmetro da cónica) – é o diâmetro paralelo às tangentes nos extremos do outro diâmetro e que bisseta todas as cordas paralelas a este. Dizem-se conjugados dois diâmetros da elipse quando as tangentes à curva nas extremidades de um deles são paralelas ao outro. Um exemplo seriam os eixos da elipse resultante da representação de uma circunferência em axonometria. Mantêm a propriedade de passar no centro da elipse, e, portanto, determinarem-se mutuamente o meio das respetivas longitudes. Na hipérbole um dos diâmetros conjugados fica apenas definido pela direção paralela às tangentes nos extremos do outro diâmetro. Na parábola um diâmetro é conjugado da direção de cordas paralelas, passando nos seus pontos médios e sendo paralelo ao eixo da parábola.

Diâmetro de uma cónica – qualquer corda que bisseta uma sequência de cordas paralelas e que passa no centro da cónica.

Diâmetro transverso – (o mesmo que eixo transverso) usualmente é definido como segmento de reta que define a distância entre os vértices da hipérbole, embora possa igualmente designar o eixo maior da elipse. Encontra-se por vezes também utilizado como a reta que contem o eixo transverso da hipérbole ou o eixo maior da elipse.

Diretriz – é a linha sobre a qual se apoia a geratriz para a definição da superfície. Numa superfície cónica é usualmente utilizada uma circunferência.

Diretriz de uma cónica – é a reta que é perpendicular ao eixo a uma distância dos focos determinada, designada por parâmetro, e que permite, em conjugação com os focos, definir a cónica.

Distância focal – na elipse e na hipérbole é a distância entre os dois focos, na parábola é a distância do foco à diretriz.

Dualidade – é um princípio enunciado por Poncelet que significa que, em geometria plana, dois teoremas são duais quando se mantêm válidos quando permutamos as palavras pontos por retas e retas por pontos. Baseado nos conceitos de pólo e polar, associados ao estudo das cónicas, foi posteriormente generalizado a diferentes teoremas da geometria. No espaço, aplica-se a todas as propriedades de posição a que correspondem outras segundas propriedades que se obtém substituindo no enunciado da primeira as palavras pontos por planos e planos por pontos.

Eixo – reta que em geometria plana corta uma figura em duas metades simétricas relativamente a esse eixo. As figuras planas podem ter um ou dois eixos. Na parábola, por exemplo, só existe um eixo. Também em relação às outras curvas cónicas, a elipse e a hipérbole, pode-se utilizar a designação de eixo, em vez de eixo maior ou eixo transverso. Em geometria tridimensional o eixo é uma reta em torno da qual se pode girar 360º uma qualquer linha geratriz de uma superfície, do mesmo plano ou não. Se a geratriz for do mesmo plano dá origem a uma superfície de revolução.

Eixo maior e menor de uma elipse – são diâmetros conjugados perpendiculares entre si no ponto médio de cada um deles, e que definem a maior e menor cordas da curva. Também são por vezes utilizadas estas designações numa hipérbole por associação desta com a elipse de igual "figura", cujo eixo maior coincide com o eixo transverso de hipérbole e é a largura de um retângulo, e cujo eixo menor da elipse define a altura do retângulo, sendo que as retas que contêm as diagonais do retângulo são as assímptotas da hipérbole.

Eixo transverso – (o mesmo que diâmetro transverso) usualmente é definido como segmento de reta que define a distância entre os vértices da hipérbole, embora possa igualmente designar o eixo maior da elipse. Encontra-se por vezes também utilizado como a reta que contem o eixo transverso da hipérbole ou o eixo maior da elipse.

Eixos conjugados da elipse – considerando a elipse uma transformação homológica de uma circunferência, em que se representem dois diâmetros perpendiculares entre si, e, por exemplo, se a transformação resultar numa representação em perspetiva cónica com dois pontos de fuga correspondentes às direções dos dois eixos, os eixos representados na elipse serão conjugados não passando no centro da elipse.

Elipse – é a secção cónica produzida por um plano oblíquo a todas as geratrizes e que não passa no vértice.

Figura – para os geómetras gregos designava o retângulo circunscrito a qualquer figura plana e que permitia, pelos processos de quadratura, calcular as áreas das próprias figuras planas. Relativamente às curvas cónicas trata-se do retângulo de lados paralelos aos eixos da elipse e tangentes a esta, e do retângulo de lados paralelos aos eixos da hipérbole e cujos vértices resultam da interseção das tangentes nos extremos do eixo transverso com as assímptotas, ou do retângulo em que o lado maior é uma corda da parábola paralela à tangente no vértice da parábola e cujos lados menores são definidos pelas perpendiculares nos extremos da corda.

Figura (de uma cónica central) – designação que os gregos atribuíam ao retângulo que tem por base o diâmetro transverso e como outro lado o parâmetro ou latus rectum.

Figura plana – é qualquer linha curva ou quebrada, ou curva e quebrada, cujos pontos se situam num único plano, embora esta expressão seja mais usualmente utilizada para designar unicamente figuras fechadas.

Figuras semelhantes – são duas ou mais figuras com propriedades geométricas iguais mas que variam de tamanho e orientação espacial. Se tiverem a mesma orientação espacial diz-se que são figuras semelhantes e de lados paralelos.

Focos de uma cónica – são pontos do eixo da cónica que são utilizados desde os gregos da antiguidade clássica como uma das formas para definir as curvas cónicas. Na elipse a soma das distâncias de qualquer dos seus pontos aos focos é igual ao eixo maior. Na hipérbole a diferença das distâncias de qualquer dos seus pontos aos focos é igual ao eixo transverso e na parábola a distância de qualquer ponto ao foco é igual à distância do ponto à diretriz. Com nome originado pelas propriedades óticas designadamente nos espelhos curvos, é um ponto do eixo que dispõe da propriedade de, nos espelhos parabólicos, ser o ponto de interseção dos raios refletidos pelo espelho resultantes de raios incidentes paralelos ao eixo. Nos espelhos elípticos os raios de luz emitidos a partir de um dos focos, depois de refletidos no espelho, intersetam-se no outro foco. Nos espelhos hiperbólicos os raios luminosos emitidos cuja reta que contem o sentido do raio passe num foco são refletidos no espelho com uma direção que contem o outro foco no prolongamento de sentido contrário ao do raio refletido. Estas propriedades da Ótica são igualmente verificadas em outras áreas da Física, designadamente na Mecânica, e comprováveis por exemplo através de mesas de bilhar com a forma de curvas cónicas. Em Astronomia o foco é a posição de um corpo celeste relativamente à órbita elíptica descrita por um seu satélite.

Geratriz – é a linha que ao deslocar-se sobre pontos da diretriz gera a superfície. Se a geratriz for reta a superfície diz-se regrada.

Grau – o mesmo que ordem

Hipérbole – é a secção cónica produzida por um plano paralelo a duas geratrizes, não as contendo e intersetando a diretriz da superfície.

Hipérboles conjugadas – são as que têm as mesmas assímptotas e a mesma distância focal, situando-se os seus ramos em quadrantes simétricos relativamente às assímptotas.

Latus rectum (ou parâmetro das ordenadas) – é o segmento de reta que tem um extremo no ponto de interseção de um diâmetro com a curva cónica, perpendicular ao diâmetro e pertencente ao plano da secção, com dimensão constante. Sendo p o latus rectum ou parâmetro, o a ordenada e a a abcissa, d o diâmetro e k um acréscimo ou subtração ao parâmetro, na parábola obtemos $p = o^2 / a$, na hipérbole obtemos $p + k = o^2 / (d + a)$ para $d / p = (d + a) / (p + k)$, e na elipse obtemos $p - k = o^2 / a$ para $d / p = (d – a) / (p – k)$. De notar que a definição referida é a correspondente a considerar a cónica apresentada pelos eixos, se esta se apresentar por dois diâmetros conjugados o parâmetro é um segmento de grandeza constante para cada cónica, a passar num extremo de um diâmetro e paralelo à direção do diâmetro conjugado.

Locus ou **Lugar Geométrico** – é o conjunto de pontos que satisfazem uma condição determinada.

Normal ou perpendicular num ponto (de uma reta, curva, plano ou superfície curva) – é a reta perpendicular a uma reta, à tangente a uma curva, nesse ponto, a perpendicular a um plano nesse ponto, ou seja, a perpendicular a duas retas não paralelas do plano e a perpendicular a uma superfície curva nesse ponto, ou seja, a perpendicular ao plano tangente à superfície nesse ponto.

Ordem ou grau de uma superfície – é o número máximo de pontos em que ela pode ser cortada por uma reta. A ordem de uma superfície é igual à ordem mais elevada das suas secções planas. **Quádrica** é uma superfície do segundo grau. **Cúbica** é uma superfície do terceiro grau. **Quártica** é uma superfície do quarto grau.

Ordenada de um ponto da cónica – é a metade da corda que passa num ponto da cónica entre este e o diâmetro conjugado da direção da corda.

Parábola – é a secção cónica produzida por um plano paralelo a uma única geratriz, não a contendo e intersetando a diretriz da superfície.

Parâmetro das ordenadas – é mesmo que latus rectum.

Parâmetro de uma cónica – designado pelas letras p ou k, é a distância de um foco à diretriz situada do mesmo lado do eixo nas cónicas centrais. Na parábola é a distância do foco à diretriz, ou seja, o dobro da distância do foco ao vértice.

Plano diretor – plano relativamente ao qual a geratriz, curva plana ou reta, no movimento de geração da superfície, se mantém paralela.

Pólo e polar relativamente a uma cónica – O ponto P, interior ou exterior à cónica, é o Pólo sendo p a polar de P em relação à cónica. A polar é a definida pelos pontos conjugados harmónicos com P, nas retas que a partir de P intersetam a cónica, relativamente aos pontos de interseção com a cónica.

Ponto de contacto – é o ponto em que uma tangente toca uma curva.

Quádrica – é o grau de uma curva ou superfície de 2º grau (ver ordem ou grau).

Quadrilátero completo – figura geométrica definida por qualquer conjunto de quatro retas complanares, em que não existe interseção simultânea de quaisquer três das retas. A figura demarca no plano um quadrilátero e dois triângulos adjacentes e tem três diagonais, duas do quadrilátero e uma terceira definida pelos vértices dos dois triângulos opostos à adjacência.

Quártica – é o grau de uma curva ou superfície de 4º grau (ver ordem ou grau).

Quíntica – é o grau de uma curva ou superfície de 5º grau (ver ordem ou grau).

Secção cónica – intersecção de um plano com um cone ou superfície cónica. Se for paralela à base ou diretriz circular é uma circunferência.

Secções subcontrárias – são secções num cone produzidas por planos perpendiculares a um plano perpendicular à base e contendo o eixo do cone, que produz no cone um triângulo semelhante aos triângulos definidos pela intersecção dos dois planos de secção com o mesmo triângulo. Nas condições descritas há duas séries de secções no cone, cada uma produzida por planos paralelos aos das duas secções subcontrárias uma da outra. Como caso particular, se um plano de secção é paralelo à base circular de um cone a secção e a sua subcontrária são circunferências assim como todas as secções paralelas a estas.

Superfície cónica – é a superfície gerada por uma reta designada geratriz, considerando que a reta se desloca fixa num ponto próprio ou impróprio, ou seja situado no infinito, tendo como diretriz qualquer das curvas cónicas não degeneradas, embora usualmente seja apresentada com diretriz circular. Aprofundando a definição, é a superfície definida por retas, designadas por geratrizes, passando por um ponto não pertencente ao plano da diretriz, próprio ou impróprio, ou seja, situado no infinito, designado vértice ou **ápex**, e que passam igualmente por pontos da diretriz, que é, em regra, uma circunferência, embora possa ser qualquer curva cónica. A superfície define um duplo cone, ou seja, dois cones semelhantes com direções opostas relativamente ao vértice. Se o vértice estiver no infinito a superfície torna-se cilíndrica, com geratrizes paralelas. Tendo em conta que a elipse, e o seu caso particular o círculo, podem ser considerados polígonos com um número infinito de lados, nessa perspetiva também são superfícies cónicas as superfícies prismáticas e piramidais. Por outro lado, se a curva diretriz degenerar numa reta a superfície é um plano.

Superfície curva – é a superfície em que existem curvas planas. As superfícies curvas podem ser de curvatura simples relativamente a um dos seus pontos, se existir um plano de secção a passar no ponto que nesta dê origem a uma reta, ou de curvatura dupla, se quaisquer dois planos de secção a passar no pontos derem origem a curvas.

Superfície de revolução – é a que resulta da rotação de uma geratriz reta ou curva em torno de um eixo. Podem ser geradas por retas ou curvas complanares com o eixo de revolução, situação mais vulgar, ou as geratrizes podem ser retas ou curvas não complanares com o eixo.

Superfície empenada – é a superfície regrada que não pode se planificar.

Superfície planificável – é a superfície regrada que pode desenvolver-se num plano.

Superfície regrada – é a que é gerada por uma reta.

Tangente a uma curva num ponto T – é a posição limite de uma secante que gira em roda do ponto até que o seu segundo ponto de intersecção com a curva se confunda com T. Se T é impróprio, ou seja, está no infinito a tangente chama-se assímptota.

Tangente a uma cónica – é a tangente à curva num ponto dado, pertencendo ao plano da curva, é perpendicular à normal, que é a bissetriz do ângulo formado pelos segmentos de reta que, nas cónicas centrais, unem o ponto dado aos dois focos, sendo na parábola o ângulo definido pelo segmento de reta que une o ponto ao foco e pela reta que passa no ponto paralela ao eixo da parábola.

Tangente a uma curva – é a reta que toca a curva num único ponto.

Triângulo axial de um cone – é a secção produzida num cone por um plano que contenha o eixo.

Tronco de superfície ou sólido – é uma das partes resultantes da intersecção da superfície ou sólido com outra superfície.

Vértice – nas figuras planas é um ponto em cada extremo dos segmentos de reta que definem a figura. Nos sólidos são pontos de interseção de arestas ou de confluência de geratrizes. Quando os vértices são interseções de arestas da base são vértices da base.

Vértice da base de um sólido – é cada ponto no extremo dos segmentos de reta que definem a base do sólido.

Vértice de um cone ou superfície cónica – é um ponto por onde passam todas as geratrizes que definem a superfície cónica

Vértice de uma curva – é o ponto sobre o eixo de uma curva, ou parte de curva, na inflexão desta no ponto de maior curvatura, e que permite dividir essa curva ou parte de curva em dois ramos.

Vértice de uma curva cónica – são os pontos da curva no eixo desta e que têm como tangentes paralelas à diretriz. Na elipse são os pontos extremos do eixo maior e na hipérbole os pontos extremos do eixo transverso. Na parábola é o ponto da curva no eixo. Nos cones retos alguns autores consideram apenas um vértice, o ponto da curva de secção a maior distância à base do cone.

NOTAÇÕES ADOTADAS E REPRESENTAÇÃO

Ao longo do texto são utilizadas nas figuras traçados de geometria plana e a representação de formas tridimensionais.

Assim, quanto aos traçados de geometria plana, designam-se os pontos por letras maiúsculas do alfabeto latino e as linhas por letras minúsculas do mesmo alfabeto, tal como tem sido habitual no ensino português de matemática e geometria descritiva.

Quanto às formas tridimensionais utiliza-se a representação em dupla projeção ortogonal, no método europeu, ou seja, projeção horizontal positiva abaixo do eixo x e frontal positiva acima do eixo x. O sistema de notações utilizado é o adotado desde 1999-2000 no ensino secundário português de Geometria Descritiva, partindo do princípio que a maioria dos utilizadores deste texto já será detentora de conhecimentos anteriores na área da Geometria Descritiva e conhecerá tal sistema de notações. Deve, no entanto, salientar-se que na história do ensino da Geometria Descritiva no ensino secundário português encontramos sistemas de notações com algumas diferenças de época para época, e que, sobretudo, no ensino superior e na bibliografia de outros países, há diferentes sistemas de notações.

Sistema de referência

– plano horizontal de projeção ν_0.

– plano frontal de projeção φ_0.

– plano de perfil de referência π_0.

– reta de intersecção de φ_0 e ν_0, eixo $\boldsymbol{x}$.

– reta de intersecção de ν_0 e π_0, eixo $\boldsymbol{y}$.

– reta de intersecção de φ_0 e π_0, eixo $\boldsymbol{z}$.

Coordenadas

– abcissa – distância ao plano π_0. É positiva para a esquerda.

– afastamento – distância ao plano φ_0. É positivo para a frente.

– cota – distância ao plano ν_0. É positiva para cima.

Notações

Pontos – (alfabeto latino maiúsculo em estilo itálico) – *A*, *B*, … *P*, *Q*… .

A_0 – projeção de *A* no eixo *x*.

A_1 – projeção horizontal do ponto *A*.

A_2 – projeção frontal do ponto *A*.

A_3 – projeção de *A* no plano de perfil π_0.

A_r – rebatimento do ponto *A*.

Retas e **linhas** em geral – (alfabeto latino min. em estilo itálico) – *a*, *b*, …*r*, …

r_1 – projeção horizontal da reta ou linha *r*.

r_2 – projeção frontal da reta ou linha *r*.

r_3 – projeção de *r* no plano de perfil π_0.

r_r – rebatimento da reta ou linha *r*.

H_r – traço horizontal da reta *r*. Intersecção de *r* com ν_0.

F_r – traço frontal da reta *r*. Intersecção de *r* com φ_0.

(r_2) – reta projetante frontal.

(r_1) – reta projetante horizontal.

$[d_1]$ – linha ***d*** curva, ou poliédrica, fechada, em projeção horizontal.

$[d_2]$ – linha ***d*** curva, ou poliédrica, fechada, em projeção frontal.

$[d_3]$ – linha ***d*** curva, ou poliédrica, fechada, em projeção lateral

Planos – (alfabeto grego minúsculo em estilo itálico)

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, o, \pi, \rho, \varsigma, \sigma, \tau, \upsilon, \varphi, \chi, \psi$ *e* ω.

θ_0 – traço do plano θ no eixo *x*. Intersecção do plano θ com o eixo *x*.

h_θ – traço horizontal do plano θ. Intersecção do plano θ com o

f_θ – traço frontal do plano θ. Intersecção do plano θ com o

p_θ – traço de perfil do plano θ. Intersecção do plano θ com o

(f_δ) – plano projetante frontal.

(h_δ) – plano projetante horizontal.

Sólidos ou **Superfícies** – (alfabeto grego maiúsculo em estilo itálico) –
$A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta, I, K, \Lambda, M, N, \Xi, O, \Pi, P, \Sigma, T, Y, \Phi, X, \Psi, \Omega$.

Linha fechada curva ou poligonal – (linha entre parêntesis retos) – [*s*] ou [*ABCDE*].

Intersecção de dois planos – reta $i = \alpha \cap \beta$.

Intersecção de uma reta com um plano – ponto $P = r \cap \delta$.

Coincidências de pontos, retas, linhas, superfícies ou suas projeções

$A \equiv A_2 \equiv (r_2) \equiv F_2 r$

$r_2 \equiv (f_\theta)$

$[d_2] \equiv (\phi)$

Tipos de linhas

Dada a natureza dos temas abordados procurar-se-á cumprir com as normas de desenho técnico, não obstante, por razões comunicativas, sejam necessárias algumas adaptações adequadas. Assim, se em desenho técnico, linhas de igual relevância têm espessuras iguais, na resolução de problemas geométricos parece aceitável que a solução seja apresentada com uma espessura maior, que em desenho técnico corresponde à delimitação dos cortes operados num material. Da mesma forma, se no desenho técnico as linhas traço ponto traço são auxiliares que designam posições de eixos ou cortes, serão aqui utilizadas também como indicação de planos auxiliares. As designações fino, médio e espesso têm correspondência no desenho técnico em normas próprias relacionadas com a dimensão dos desenhos e que, grosso modo, significam aproximadamente a duplicação da espessura fina para a espessura média e, novamente a sua duplicação para a espessura maior, tendo em conta a dimensão total do desenho.

Linhas auxiliares – traço contínuo fino.

Contornos visíveis ou dados – traço contínuo de espessura média.

Contornos invisíveis – traço interrompido de espessura média.

Linhas de apresentação de soluções – traço de espessura maior, contínuo ou interrompido.

Planos auxiliares e linhas de eixo – traço ponto traço de espessura fina.